ファジィ一般逆行列

増田 文夫*

ムーア・ペンローズ型一般逆行列は統計学、電気工学、その他の分野で盛んに使われている重要な概念である。以下では、ムーア・ペンローズ型一般逆行列を単に「一般逆行列」という。行列Aの一般逆行列をA† で、Aの転置行列をA^Tで表す。ファジィ数を要素に持つ行列の一般逆行列を Greville のアルゴリズム〔1〕を用いて計算した結果を報告する。

Greville のアルゴリズムを用いて、ファジィのときも「必ず」と言えるように証明したわけではない。ファジィ行列の一般逆行列も求められることを例示した。

1 一般逆行列の定義

$AA^\dagger A=A$、$A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger$、$(AA^\dagger)^T=AA^\dagger$、$(A^\dagger A)^T=A^\dagger A$の4つの条件を満たすA† をAのムーア・ペンローズ型一般逆行列と呼び一意に定まる。Aが正則ならばA† はA^{-1}に一致する。

2 演算等の定義

ファジィ数aのメンバーシップ関数は三角形とし、a＝[a.lo, a.me, a.hi]または a＝[x,y,z]で表現する。演算等は次のように定義する。

$[x,y,z]+[u,v,w]=[x+u,y+v,z+w]$、

$[x,y,z]-[u,v,w]=[x-w,y-v,z-u]$、

$[x,y,z]*[u,v,w]=[\min\{x*u,x*w,z*u,z*w\},\ y*v,\ \max\{x*u,x*w,z*u,z*w\}]$、

$[x,y,z]/[u,v,w]=[x,y,z]*[1/w,1/v,1/u]$

ただし $u\leqq 0\leqq w$ のときは商「／」は定義されない。

$$\mathrm{sqr}([x,y,z])=\begin{cases}[x^2,\ y^2,\ z^2] & (\text{if } 0\leqq x\leqq z)\\ [z^2,\ y^2,\ x^2] & (\text{if } x\leqq z\leqq 0)\\ [0,y^2,\max\{x^2,\ z^2\}] & (\text{if } x<0<z)\end{cases}$$

一般には sqr(a)＝a＊a とは限らない。例えば、a＝[−3,−1,2]とすると

sqr([−3,−1,2])＝[0,1,9], [−3,−1,2]＊[−3,−1,2]＝[−6,1,9]となる。

ファジィ数を要素とするベクトルのノルム‖・‖の自乗を考える。

＊東京情報大学講師
1995年12月1日受理

$\underline{a} = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)^T$, 各$a_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ はファジィ数。

$$\|\underline{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{sqr}(a_i).$$

3　ファジィ一般逆行列を求めるアルゴリズム（Grevilleの方法）

Aをm×nの行列とする。$A = [\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \cdots,\ \underline{a}_n]$とし
$A_k = [\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \cdots,\ \underline{a}_k] = [A_{k-1},\ \underline{a}_k]\ (2 \leqq k \leqq n)$ とする。

IF $\|\underline{a}_1\|^2.\mathrm{lo} = 0$ THEN $A\dagger_1 = \underline{0}^T$
ELSE $A\dagger_1 = \underline{a}_1^T / \|\underline{a}_1\|$.

$\underline{d}_K = A\dagger_{K-1} * \underline{a}_K$,　$\underline{c}_K = \underline{a}_K - A_{K-1} * \underline{d}_k$とおく。$(1 < k)$

IF $\|\underline{c}_k\|^2.\mathrm{lo} = 0$ THEN $\underline{b}_k^T = \underline{d}_k^T A\dagger_{k-1} / (1 + \|\underline{d}_k\|^2)$
ELSE $\underline{b}_k^T = \underline{c}_k^T / \|\underline{c}_k\|^2$.

$$A\dagger_k = \begin{bmatrix} A\dagger_{k-1} - \underline{d}_k\ \underline{b}_k^T \\ \underline{b}_k^T \end{bmatrix}$$

$A\dagger_n = A\dagger$ となる。

4　数値例

a = [a.lo, a.me, a.hi]とし、a.lo =0.92* a.me, a.hi =1.08* a.me.とする。即ち摂動を8%とする。

$$A.lo = \begin{bmatrix} -2.160 & 0.920 & 0.920 \\ 0.920 & -2.160 & 0.920 \\ 0.920 & 0.920 & -2.160 \\ -2.160 & 0.920 & 0.920 \end{bmatrix}$$

$$A.me = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.hi = \begin{bmatrix} -1.840 & 1.080 & 1.080 \\ 1.080 & -1.840 & 1.080 \\ 1.080 & 1.080 & -1.840 \\ -1.840 & 1.080 & 1.080 \end{bmatrix}$$

のとき、

$$A^{\dagger}.lo = \begin{bmatrix} -2.530 & -1.520 & -13.627 & -2.530 \\ -2.357 & -1.792 & -13.685 & -2.357 \\ -0.669 & -0.333 & -4.471 & -0.669 \end{bmatrix}$$

$$A^{\dagger}.me = \begin{bmatrix} -0.13\cdot & -0.06\cdot & -0.06\cdot & -0.13\cdot \\ 0.06\cdot & -2.000 & -0.13\cdot & 0.06\cdot \\ 0.06\cdot & 0.13\cdot & -0.200 & 0.06\cdot \end{bmatrix}$$

$$A^{\dagger}.hi = \begin{bmatrix} 7.086 & 11.858 & 0.845 & 7.086 \\ 7.339 & 11.713 & 1.120 & 7.339 \\ 2.303 & 3.827 & 0.046 & 2.303 \end{bmatrix}$$

である。

5　おわりに

行列要素のファジィ数演算が§ 3で定義されるとき、一般並行列をGrevilleのアルゴリズムで計算できることを例示した。

$a_{11.hi} - a_{11.lo} = 0.32$ に対して $a^{\dagger}_{11.hi} - a^{\dagger}_{11.lo} = 9.616$ であり、30倍になっている。このような広がりは好ましくないので感度解析、高速自動微分法などを併用して広がりを最小限に抑えることが今後の課題である。

謝辞

本研究を進める上でご指導いただいた日本大学理工学部数学科　戸川隼人教授に深謝いたします。本論文は東京情報大学共同研究助成（平成７年度－Ｂ２）を受けています。

文献

[1]Greville T.N.E."Some applications of the pseudoinverse of matrix" SIAM Rev. vol.2 (1960) pp.15-22.